Polynômes et fonctions de Hermite | Leçons : 209, 213, 234, 244, 250

Prop : $L^2_w = \{f$ mesurable, $\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 w(x)\,dx < +\infty\}$ muni du produit scalaire $\langle f,g\rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x)\bar{g}(x)\,w(x)\,dx$ est un esp de Hilbert

Def : $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} D^n(e^{-x^2})$, $D = \frac{d}{dx}$ est le n° polynôme de Hermite

Prop : $H_{n+1} = (2x - D)H_n$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $DH_n = 2nH_{n-1}$

Développement :

Prop : (H_n) est une famille orthogonale et totale de L^2_w

Preuve :

- Soit $m \leq n$ on a

$$\langle H_m, H_n\rangle_w = \int_{\mathbb{R}} H_m(x) H_n(x) e^{-x^2}\,dx$$

$$= (-1)^n \int_{\mathbb{R}} H_m(x) \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2})\,dx$$

n-IPP, les termes entre crochets $[\ ]_{-\infty}^{+\infty}$ sont de la forme $P_n(x)e^{-x^2} \underset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow} 0$

$$= \int_{\mathbb{R}} H_m^{(n)}(x) e^{-x^2}\,dx$$

$\boxed{1}$ Si $m < n$ on a $\deg H_m = m$ d'où $H_m^{(n)} = 0 \Rightarrow \langle H_m, H_n\rangle_w = 0$

$\boxed{2}$ Si $m = n$ on a $H_{n+1} = (2x - D)H_n = (2x-D)^2 H_{n-1} = \dots$ on a alors le coeff dominant de H_n qui est $(2x)^n$ d'où $H_n^{(n)}(x) = 2^n n!$

D'où $\langle H_n, H_n\rangle_w = 2^n n! \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\,dx = 2^n n! \sqrt{\pi}$

D'où l'orthogonalité

- Pour montrer que la famille $(H_n)_n$ est totale on montre que $(H_n, n\in\mathbb{N})^\perp = \{0\}$
Soit f tq $\langle f, H_n\rangle_w = 0$ mq $f = 0$, (H_n) est échelonnée en degrés donc forme une base de $\mathbb{R}_n[X]$ d'où $\forall P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\langle f, P\rangle = 0$

On calcule $\mathcal{F}(e^{-x^2}f)(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-x^2} e^{-ix\xi} dx$

$$= \int_{\mathbb{R}} f(x) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-i\xi)^n}{n!} x^n \right) e^{-x^2} dx$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-i\xi)^n}{n!} \underbrace{\int_{\mathbb{R}} f(x) x^n e^{-x^2} dx}_{\langle f, x^n \rangle = 0}$$

$$= 0$$

D'où par injectivité de la transformation de Fourier on a que $f = 0$

D'où le résultat

On a $\int_{\mathbb{R}} \sum_{n=0}^{+\infty} \left| \frac{(-i\xi)^n}{n!} f(x) x^n e^{-x^2} \right| dx = \int_{\mathbb{R}} |f(x)| e^{|\xi x|} e^{-x^2} dx$

Par Cauchy Schwarz $\leq \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 e^{-x^2} dx \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}} \cancel{|f(x)|} e^{2|\xi x|} e^{-x^2} dx \right)^{1/2}$

$< +\infty$

D'où l'interversion des signes

$\square$

Prop: $h_n(x) = e^{-x^2/2} H_n(x)$

- $(-D^2 + x^2) h_n = (2n+1) h_n$
- $\mathcal{F}(h_n) = (-i)^n \sqrt{2\pi}\, h_n$, $\underline{\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})}$

Rendre $L^1 \cap L^2$ pour être sûr de la bonne déf (pas juste un prolongement de Plancherel)

Preuve:

- On a $Dh_n = D(e^{-\frac{x^2}{2}} H_n) = -x h_n + \underbrace{e^{-\frac{x^2}{2}} DH_n}_{2n h_{n-1}}$ $\Rightarrow (x + D) h_n = 2n h_{n-1}$

et $H_{n+1} = (2x - D) H_n \Rightarrow h_{n+1} = 2x h_n - e^{-\frac{x^2}{2}} DH_n = 2x h_n - (x + D) h_n$
$= (x - D) h_n$

D'où $h_n = (x - D) h_{n-1} = \frac{1}{2n} (x - D)(x + D) h_n \Rightarrow (-D^2 + x^2) h_n = (2n+1) h_n$

- Par récurrence:

-Si $n = 0$ on a $\mathcal{F}(h_0)(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}} e^{-ix\xi} dx = \sqrt{2\pi} e^{-\frac{\xi^2}{2}} = \sqrt{2\pi}\, h_0$

-Si on supp vrai le résultat au rang n on a donc au rang $n+1$

$\widehat{h_{n+1}} = \widehat{x h_n} - \widehat{D h_n} = (-i)(x - D) \widehat{h_n} \underset{\text{hyp de rec}}{=} (-i) \sqrt{2\pi} (-i)^n (x - D) h_n = \sqrt{2\pi} (-i)^{n+1} h_{n+1}$

Complément :

- Savoir montrer que $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$

On pose $I = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} e^{-(x^2+y^2)} dx\,dy$, $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ $\Rightarrow I = \pi \Rightarrow \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$

- Savoir montrer que la transformée de Fourier d'une gaussienne ~~est~~ une gaussienne

On a $\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} e^{-ix\xi} dx$ on calcul $\hat{f}'(\xi)$ et on obtient une EDO

- Les h_n forment une base de $L^2(\mathbb{R})$ car ~~form~~ "diagonalise" $\mathcal{F}$.

$\mathcal{F}$ est DZ $\Leftrightarrow$ $\exists$ base de vecteurs propres de $L^2(\mathbb{R})$

De manière générale $\begin{cases} L^2_w(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R}) \\ f \mapsto \sqrt{w} f \\ \frac{g}{\sqrt{w}} \mapsto g \end{cases}$ est ~~une~~ des isométries ~~surjective~~ bijectives

D'où pour une famille (P_n) de polynôme orthogonaux formant une base de $L^2_w(I)$

on a que $(\sqrt{w} P_n)$ est une base de $L^2(\mathbb{R})$

- Savoir montrer l'injectivité de la transformation de Fourier

Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ tq $\hat{f} = 0$, mq $f = 0$

on note $\gamma_s(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi s}} e^{-\frac{x^2}{2s}}$ avec $s > 0$ on note $g_s(x) = e^{iax}\gamma_s(x)$

$$\text{On a } \int_{\mathbb{R}} f(u)\hat{g}_s(u)du = \int_{\mathbb{R}} f(u)\hat{\gamma}_s(u-a)du$$

$$= \int_{\mathbb{R}} f(u)\hat{\gamma}_s(a-u)du$$

$$= f * \hat{\gamma}_s(a)$$

$$= \sqrt{\frac{2\pi}{s}}\, f * \gamma_{\frac{1}{s}}(a)$$

Or $\hat{f} = 0$ d'où $\int_{\mathbb{R}} f(u)\hat{g}_s(u)du = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(u) g_s(u) du = 0$

De plus $\gamma_{\frac{1}{s}}$ est une approximation de l'unité d'où

$0 = \lim_{s \to 0} \| f * \gamma_{\frac{1}{s}} - f \|_1 = \|f\|_1 \Rightarrow f = 0$ d'où le résultat.

El Amrani, Analyse de Fourier + Schwartz, Analyse hilbertienne